Μάθημα 6ο

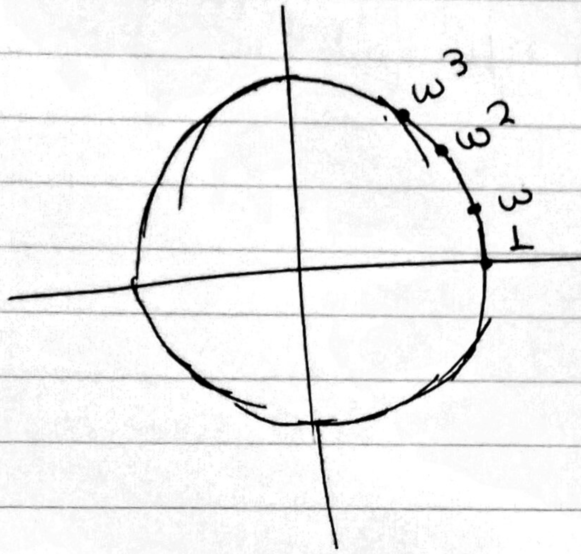
19/10/2017

n-οστές ρίζες της μονάδας.

$$z^n = 1$$

$$z_k = \text{συν}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\text{ημ}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \omega^k$$

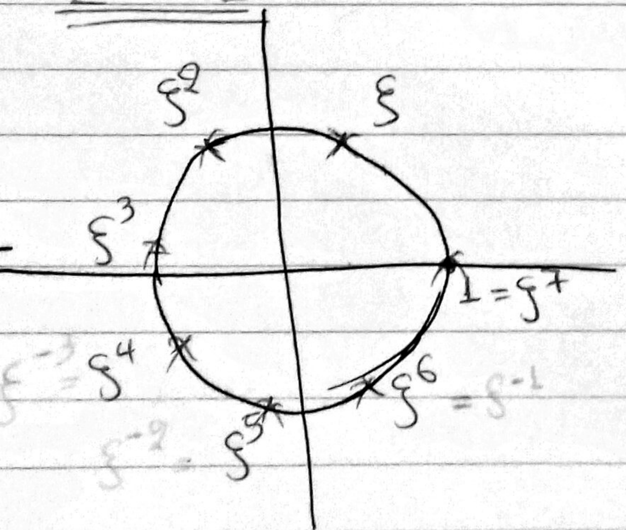
$$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$



$$\omega = z_1 = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

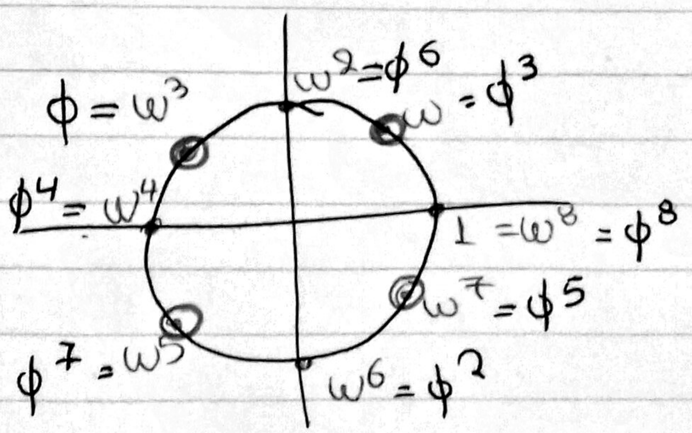
$$z^n = a$$

- $z^7 = 1$



$$\xi = \text{συν}\,\frac{2\pi}{7} + i\cdot\text{ημ}\,\frac{2\pi}{7}$$

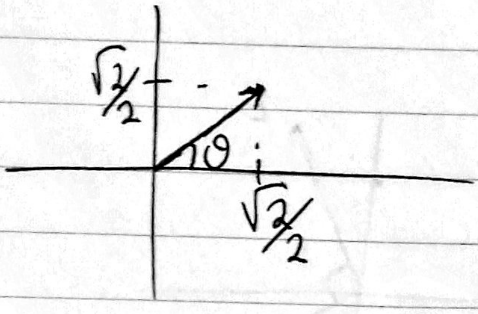
- $z^8 = 1$



$$\omega = \text{συν}\,\frac{2\pi}{8} + i\cdot\text{ημ}\,\frac{2\pi}{8}$$

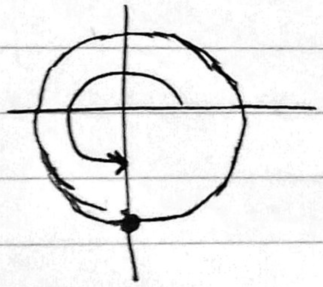
Άσκηση 6 // #9 φυλλάδιο

$$\left((1+i)/\sqrt{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 =$$



$$= \sqrt{2}/2 + i\cdot\sqrt{2}/2 = 1^6 \cdot \text{συν}\,\frac{6\pi}{4} + i\cdot\text{ημ}\,\frac{6\pi}{4}$$

$$= \text{συν}\,\frac{3\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{3\pi}{2} = -i$$



Άσκηση 7 // #2 φυλ

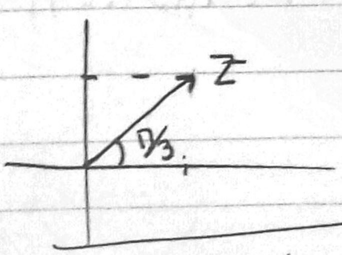
$z = (1+i\sqrt{3})/2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad |z| = 1.$

$z^{2017} = ;$

$$z = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \left|1\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{3}\right)\right|^{2017}$$

$$= 1^{2017}\left(\text{συν}\left(\frac{2017\pi}{3}\right) + i\cdot\text{ημ}\,\frac{2017\pi}{3}\right)$$

$$= \text{συν}\frac{(336\cdot 3+1)\pi}{3} + i\cdot\text{ημ}\frac{(336\cdot 6+1)\pi}{3}$$



$$\begin{array}{r|l} 2017 & 6 \\ \hline & 336 \end{array}$$

υ = 1

Άρα $2017 = 6\cdot 336 + 1$ $=$ ⟶

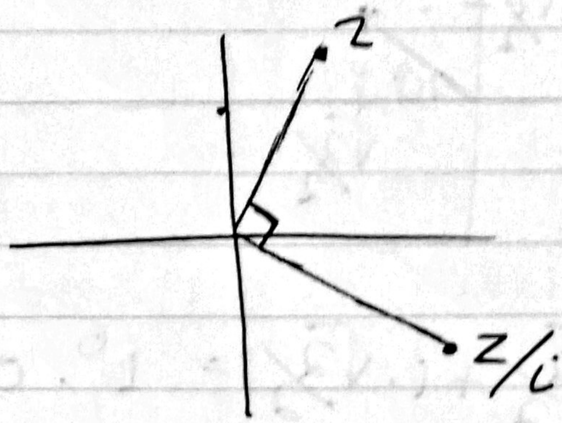
$$= συν\left((336\cdot 2\pi) + \frac{\pi}{3}\right) + i\cdot ημ\left(336\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= συν\frac{\pi}{3} + i\cdot ημ\frac{\pi}{3} = (1 + i\cdot\sqrt{3})/2$$

Άσκηση 8 // #2 φυλ.

$$z/i = \frac{\rho(συνθ + i\cdot ημθ)}{1\cdot(συν\frac{\pi}{2} + i\cdot ημ\frac{\pi}{2})}$$

$$= \rho\cdot\left(συν\left(θ - \frac{\pi}{2}\right) + i\cdot ημ\left(θ - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$



Άσκηση 9 // #2 φυλ.

$z = συνθ + i\cdot ημθ$

i) $z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2συν(n\cdot θ)$

ii) $z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2\cdot ημ(n\cdot θ)\cdot i$

Λύση

i) $z = συνθ + i\cdot ημθ \qquad |z| = 1$

$$z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = z^n + z^{-n} = 1^n(συν(nθ) + \cancel{i\cdot ημ(n\cdot θ)}) + 1^{-n}(συν(-nθ) + \cancel{i\cdot ημ(-n\cdot θ)})$$

$$= 2συν(n\cdot θ)$$

ii) Όμοια.

Άσκηση 10 // #2 Φυλ.

$n \geq 2.$ $\quad \omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

- $1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1} = \frac{\omega^n-1}{\omega-1}$ → γεωμετρική πρόοδος

$$= \frac{1-1}{\omega-1} = 0$$

$\omega^n = 1.$

- $1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdots\omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+\dots+(n-2)+(n-1)} =$

$\cancel{=\omega\cdot(n-1)(n-1+1)}$

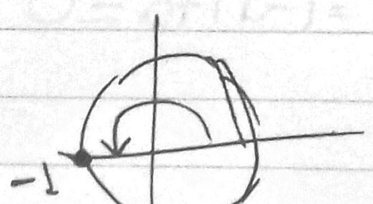
$$=\omega^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}} = \omega^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}$$

$$=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n} + i\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\cancel{2}\pi(n-1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{n}\cancel{2}}\right) + i\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi(n-1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\cancel{2}}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu(\pi(n-1)) + i\eta\mu(\pi(n-1))$$

$$=(\sigma\upsilon\nu\,\pi + i\eta\mu\,\pi)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$



Βιβλίο: Θεωρία Αριθμών Αντωνιάδης Κάλλαπος.

Φυσικοί Αριθμοί

→ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών.
$+, \cdot$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Μπορώ να προσθέτω και να πολλ/ζω, αλλά δεν μπορώ πάντα να αφαιρώ και να διαιρώ.

→ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ $\overset{+}{\cdot}$ Δακτύλιος

Το σύνολο των ακεραίων

$a, b \in \mathbb{Z}$ $a > b \Rightarrow a - b \in \mathbb{N}$

→ Ιδιότητες Πρόσθεσης

1) Για κάθε $a, b, \gamma \in \mathbb{Z}$ ισχύει:
$(a+b)+\gamma = a+(b+\gamma)$ (ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ)

Δίνουμε με τις ιδιότητες 1,2,3: Ομάδα

2) $0 \in \mathbb{Z}$ $0+a = a+0 = a$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

3) $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists (-a) \in \mathbb{Z})$ τ.ω. $a+(-a) = (-a)+a = 0$

4) $a+b = b+a$ (Αβελιανή ομάδα)

→ Ιδιότητες Πολ/σμου

5) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

6) $1 \in \mathbb{Z} \quad 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \quad , \forall \alpha \in \mathbb{Z}$

7) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

8) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ)

- Σύνολα στα οποία ισχύουν οι 1, 2, 3, 4, 5, 8 ονομάζονται Δακτύλιοι.

$\mathbb{N}$ $+, \cdot$

$\mathbb{Z}$ $+, \cdot, -$ Δακτύλιος

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{R}\\ \mathbb{Q}\\ \mathbb{C}\end{array}\right\}$ $+, \cdot, -$ Δακτύλιοι.
$+, \cdot, -, /$ Σώματα.